

一、前言

二、直接由司乃耳定律利用數值計算找出虹霓的觀測角度

1. 虹的觀測角度
2. 數值計算

三、笛卡兒的虹霓理論

1. 觀測虹霓方向的條件
 - 1.1 虹的最小偏向角
 - 1.2 霓的最小偏向角
 - 1.3 虹霓的觀測角 δ 與入射角 i 的關係圖
2. 一般公式
 - 2.1 第 k 級虹的偏向角
 - 2.2 最小偏向角
3. 疑慮

四、射出光線的強度分布

1. Fresnel 公式
2. 應用到虹霓
3. 光線強度的分布
4. 光線強度分布的修正
5. 數值計算與修正結果
6. 觀測虹霓角度的結論

五、有關虹霓的其他問題

II 虹 霓 現 象

一、前言：

雨過天青，有時候天邊會出現虹霓的現象。在高一的基礎物理，與高三物理的光學部份，都有一段討論到虹與霓的現象，這是光的色散現象很好的說明。每個同學都看過虹霓，因此這部份頗能引起學生的興趣，學生們對虹霓現象提出的問題也可能比較多。

如果在上課開始，先請同學們對於虹霓現象就生活中的經驗提出不了解或想更進一步知道的問題，學生們最可能想了解的事項有：

1. 為什麼能看到虹霓的機會不多？
2. 為什麼會有兩層？
3. 外面的一圈（霓）為什麼會比較淡？
4. 虹霓是怎麼形成的？
5. 虹霓為什麼是半圓弧形的？
6. 虹霓似乎與下雨有關，是嗎？
7. 看到虹霓，會連想到光經過三稜鏡後顏色會散開來，這兩個現象有沒有共同點？
8. 是不是空曠的地方才看得到虹霓？

通常老師解說虹霓現象的成因，是光線的路徑由於折射與反射而有偏向，又由於折射率的不同造成色散，乃形成虹霓現象。一般的學生聽完老師的講解後，大致可以接受，可是程度比較好的學生可能還會有下列疑問有待解答：

1. 為什麼有時候看到的虹比較大？有時比較小？
2. 一般看到的虹都接近半圓，有沒有很大的虹？甚至於整圈的虹？
3. 印象中好像中午左右沒出現過虹霓，為什麼呢？
4. 虹霓與人的距離有多遠？

老師本身可能更會想到下列問題：（有些問題也許是資優生會想到的）

1. 觀測虹霓時，角度是不是固定？為什麼？
2. 形成虹霓的雨滴有多大？

3.虹與霓之間的天空，相對的會比較暗，為什麼？

4.虹是光線在雨滴中經一次反射，霓是經過兩次反射，那有沒有三次反射的『虹霓』？多次反射的虹霓？或沒有經過反射，直接折射出來的『虹霓』？

5.光在界面有部份反射，部份折射的現象，光線經雨滴反射、折射時，光線的強度會怎樣變化？看到的虹霓是不是從該方向出來的光線最『強』？

6.可以進行人造彩虹嗎？

7.其他，老師在書報上看到的，連想到的問題。例如，聽說虹霓的光線是偏振光，可是詳情不清楚。

這三大部分的問題中，第一部分可以從一般的教科書中找到答案，這也是老師們在上課時必定會交代清楚的事項；每位老師也都很熟悉，本文不擬加以討論。本文主要的重點就是針對後兩部分所提的問題做較為詳盡的探討。

二、直接由司乃耳定律利用數值計算找出虹霓的觀測角度

1.虹的觀測角度

右圖為光線進入水滴後反射與折射的情形，光線射出方向與入射方向的夾角稱為偏向角 α ，而地上觀察者觀測的角度為 δ ，由圖知

$$\alpha + \delta = 180^\circ,$$

由國中幾何，甚易得到

$$\delta = 4r - 2i$$

入射角 i 與折射角 r 需適合折射定律。

2.數值計算：

$$\text{由司乃耳定律 } n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

$$\text{得 } 1 \sin i = n \sin r$$

入射角 i 從 0 到 90° ，每 0.1° 計算

一次折射角 r ，再算出觀測仰角 δ ，

以下為虹的紫色光計算的片段。(n=1.3435)

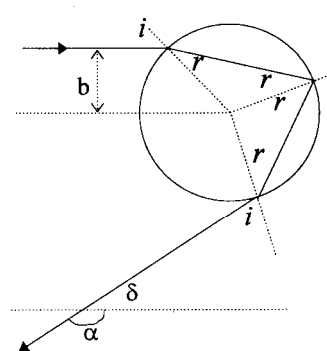


圖 1. 虹

| i | δ |
|-----|----------|
| 0.0 | 0.000 |
| 0.1 | 0.098 |
| 0.2 | 0.195 |
| 0.3 | 0.293 |
| 0.4 | 0.391 |
| 0.5 | 0.489 |
| 0.6 | 0.586 |
| 0.7 | 0.684 |
| 0.8 | 0.782 |
| 0.9 | 0.880 |
| 1.0 | 0.977 |
| 1.1 | 1.075 |
| 1.2 | 1.173 |
| 1.3 | 1.270 |
| 1.4 | 1.368 |
| 1.5 | 1.466 |
| 1.6 | 1.563 |
| 1.7 | 1.661 |
| 1.8 | 1.759 |
| 1.9 | 1.856 |
| 2.0 | 1.954 |
| 2.1 | 2.052 |

| | |
|------|--------|
| 20.8 | 19.705 |
| 20.9 | 19.794 |
| 21.0 | 19.882 |
| 21.1 | 19.970 |
| 21.2 | 20.059 |
| 21.3 | 20.147 |
| 21.4 | 20.235 |
| 21.5 | 20.323 |
| 21.6 | 20.411 |
| 21.7 | 20.498 |
| 21.8 | 20.586 |
| 21.9 | 20.674 |
| 22.0 | 20.761 |
| 22.1 | 20.849 |
| 22.2 | 20.936 |
| 22.3 | 21.023 |

| | |
|------|--------|
| 46.8 | 37.840 |
| 46.9 | 37.883 |
| 47.0 | 37.925 |
| 47.1 | 37.967 |
| 47.2 | 38.009 |
| 47.3 | 38.050 |
| 47.4 | 38.091 |
| 47.5 | 38.132 |
| 47.6 | 38.172 |
| 47.7 | 38.212 |
| 47.8 | 38.252 |
| 47.9 | 38.292 |
| 48.0 | 38.331 |

| | |
|------|--------|
| 48.1 | 38.370 |
| 48.2 | 38.409 |
| 48.3 | 38.447 |
| 48.4 | 38.485 |
| 48.5 | 38.523 |
| 48.6 | 38.560 |
| 48.7 | 38.598 |
| 48.8 | 38.635 |
| 48.9 | 38.671 |
| 49.0 | 38.707 |

| | |
|------|--------|
| 57.8 | 40.554 |
| 57.9 | 40.558 |
| 58.0 | 40.562 |
| 58.1 | 40.565 |
| 58.2 | 40.568 |
| 58.3 | 40.570 |
| 58.4 | 40.572 |
| 58.5 | 40.573 |
| 58.6 | 40.575 |
| 58.7 | 40.575 |
| 58.8 | 40.575 |
| 58.9 | 40.575 |
| 59.0 | 40.575 |
| 59.1 | 40.574 |
| 59.2 | 40.572 |
| 59.3 | 40.570 |
| 59.4 | 40.568 |
| 59.5 | 40.565 |
| 59.6 | 40.562 |
| 59.7 | 40.558 |
| 59.8 | 40.554 |
| 59.9 | 40.549 |

| | |
|------|--------|
| 76.7 | 32.263 |
| 76.8 | 32.162 |
| 76.9 | 32.060 |
| 77.0 | 31.958 |
| 77.1 | 31.855 |
| 77.2 | 31.751 |
| 77.3 | 31.647 |
| 77.4 | 31.541 |
| 77.5 | 31.436 |
| 77.6 | 31.329 |
| 77.7 | 31.222 |
| 77.8 | 31.114 |
| 77.9 | 31.005 |
| 78.0 | 30.896 |

由表中可以看到，取相差同為 1° 範圍的入射角內，比較觀測仰角 δ 散開的範圍。

| $\Delta i = 1^\circ$ | $\Delta \delta$ |
|---------------------------|-----------------|
| $1^\circ - 2^\circ$ | 0.977° |
| $21^\circ - 22^\circ$ | 0.889° |
| $47^\circ - 48^\circ$ | 0.406° |
| $58.3^\circ - 59.3^\circ$ | 0.005° |
| $77^\circ - 78^\circ$ | 1.062° |

顯然在入射角為 $58.3^\circ - 59.3^\circ$ 的範圍間，射出光線最為集中，遠比其他方向入射時，射出的光線要集中多多了，取入射角為 58.8° 時，由表知 $\delta = 40.58^\circ$ ，而這與實際觀測的仰角一致。

同樣的方法可以得到虹的紅光與霓的紅、紫光的角度，當然也都與觀測的角度相同。

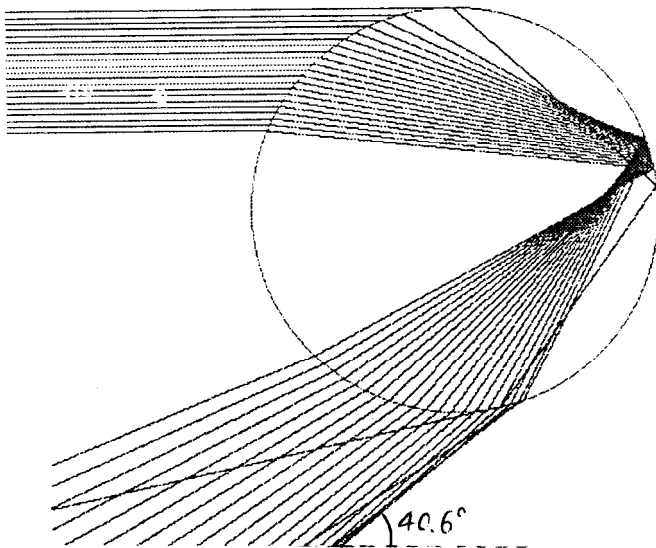


圖 2. 觀測到的虹 (紫)

三、笛卡兒的虹霓理論

1. 觀測虹霓方向的條件

笛卡兒 (Descartes 1596-1690) 認為不同的入射角對應不同的偏向角中，只有最小偏向角才是我們觀測到的虹霓的方向。

1.1 虹的最小偏向角

虹的偏向角 α 為

$$\alpha = 180^\circ - (4r - 2i) \quad \text{-----(1)}$$

求最小偏向角時，只要微分，令 $\frac{d\alpha}{di} = 0$ 即可。

得 $\frac{dr}{di} = \frac{1}{2}$ -----(2)

又由司乃耳定律 $1 \sin i = n \sin r$ -----(3)

得 $\cos i = n \cos r \cdot \frac{dr}{di}$ -----(4)

(2) 式代入 (4) 式，再與 (3) 式消去 r 得

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \text{ -----(5)}$$

把折射率 n 代入，得到對應最小偏向角的入射角 i ，再代回 (1) 式，即可求出最小偏向角 α ，而 $\delta = 180^\circ - \alpha$ 就是我們看到的虹的仰角。

把紅光與紫光在水中的折射率 1.3311 與 1.3435 分別代入，

| | | | | |
|----|------------|-----------------|-----------------|---------------------|
| 紫光 | $n=1.3435$ | $i=58.80^\circ$ | $r=39.55^\circ$ | $\delta=40.6^\circ$ |
| 紅光 | $n=1.3311$ | $i=59.52^\circ$ | $r=40.35^\circ$ | $\delta=42.4^\circ$ |

1.2 霓的最小偏向角

霓的做法類似，不難證得射出的光線與原入射方向的夾角為

$$\delta = 180^\circ - (6r - 2i) \text{ -----(6)}$$

而 $\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}}$ -----(7)

可得最小偏向角。

| | | | | |
|----|------------|-----------------|-----------------|---------------------|
| 紫光 | $n=1.3435$ | $i=71.51^\circ$ | $r=44.90^\circ$ | $\delta=53.6^\circ$ |
| 紅光 | $n=1.3311$ | $i=71.90^\circ$ | $r=45.57^\circ$ | $\delta=50.4^\circ$ |

1.3 虹霓的觀測角 δ 與入射角 i 的關係圖

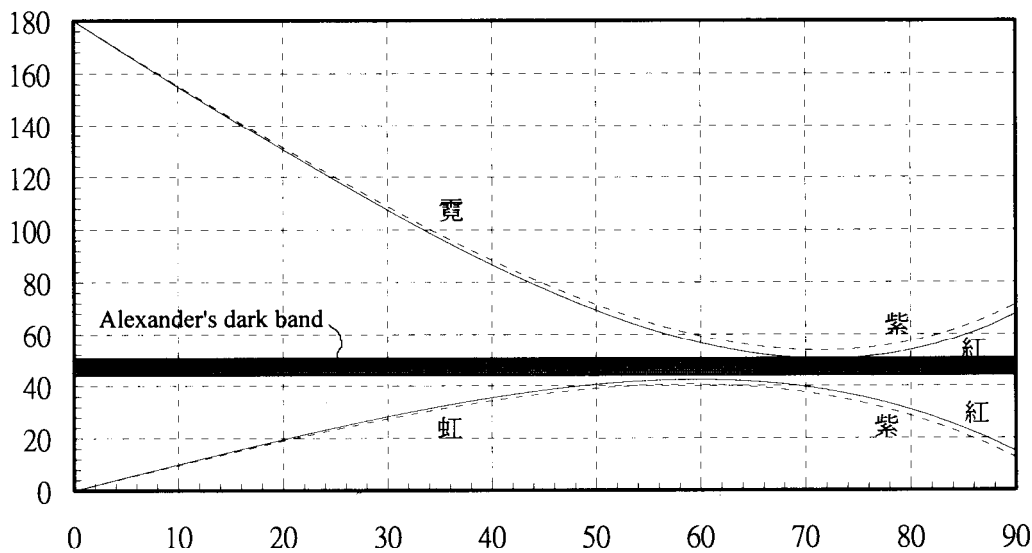


圖 3. 觀測角與入射角的關係圖

2. 一般公式

2.1 第 k 級虹的偏向角

光線進入水滴後，經過一次反射後再折射出去，即是虹；若經兩次反射再折射出去，即是霓；若經過 k 次反射再折射出去，稱為第 k 級虹；當然，如果未經反射又折射出去，可稱為第零級虹。

設光以入射角 i 進入水滴，折射角為 r ，則光在水滴內每折射一次，與原路徑偏的角度為 $(i - r)$ ，不管是多少級的虹，都有兩次的折射，故折射部分共偏了 $2(i - r)$ 。反射部分，每反射一次，路徑方向偏了 $(180^\circ - 2r)$ ，第 k 級的虹，反射了 k 次，反射部分共偏了 $k(180^\circ - 2r)$ ；所以第 k 級的虹出射方向對原入射方向而言，偏的角度 α 為

$$\alpha = 180^\circ k + 2i - 2(k+1)r \quad \text{-----(8)}$$

須注意此處的角度 α 與上面的 δ 並不相同，請看下圖。

以霓 ($k=2$) 為例

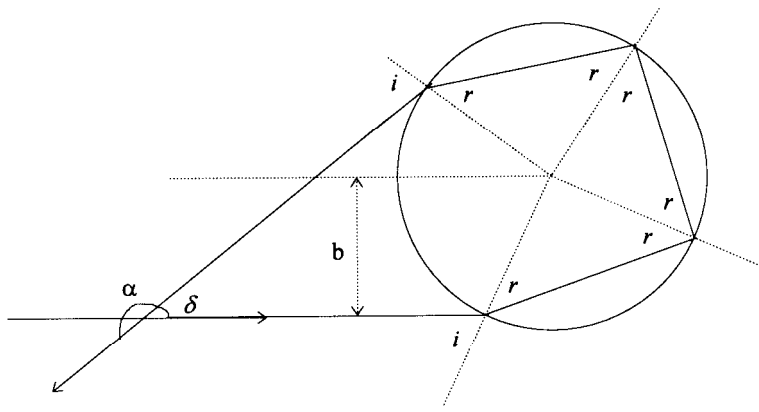


圖 4. α 與 δ

2.2 最小偏向角

雖然 α 與 δ 不一樣，但只是差一常數（不同級的虹，差的常數不同），故

$$\frac{d\delta}{di} = \frac{d\alpha}{di}$$

依笛卡兒的方法，求第 k 級虹的最小偏向角，即令 $\frac{d\alpha}{di} = 0$ 即可。

由 (8) 式及 $\frac{d\alpha}{di} = 0$ 可得

$$\frac{dr}{di} = \frac{1}{k+1} \quad \text{-----(9)}$$

又由司乃耳定律 $1 \sin i = n \sin r$ -----(3)

$$\text{得} \quad \cos i = n \cos r \cdot \frac{dr}{di} \quad \text{-----(4)}$$

(9) 式代入 (4) 式，再與 (3) 式消去 r 得

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k(k+2)}} \quad \text{-----(10)}$$

(10) 式即對應第 k 級虹最小偏向角的入射角，求出後，由司乃耳定律算出 r ，再代入第 (8) 式，即得第 k 級虹的方向。

3. 疑慮

在圖(3)偏向角與入射角的關係圖中，可以看出光線射出時的集中程度，以虹的紅光為例，觀測仰角在 42° 附近有極值，即表示在該角度的射出光線最為集中，但是，此極值並非很窄，由圖可以看出在 42° 上下相差約 8° 的範圍內，光線也是相當集中，在此範圍內應該可以看到一片紅光；而紫光也是類似，各色光在其極值附近相差 8° 的範圍會重疊，於是幾乎不會有各色光分開的現象。這與事實不符，因為看到的各色光都是固定的角度，而這角度剛好是圖中的極值的偏向角。

因此，只由最小偏向角的理論似乎還不能完全說明虹霓現象，應該要再考慮光從不同的角度射出的強度分布。

四、射出光線的強度分布

1. Fresnel 公式

我們都知道光（電磁波）行進至界面時，會有部分反射與部分折射的現象，而反射與折射的電場則依 Fresnel 公式來計算；此公式的推導可參閱一般的電磁學或光學課本，這裡僅把公式列出。

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}$$

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)}$$

2. 應用到虹霓

主要是反覆利用 Fresnel 公式，本文以虹的紅光為例，

- 光由空氣進入水中的折射，取式中的 t_{\parallel} 與 t_{\perp}
- 光在水滴內反射，取 r_{\parallel} 與 r_{\perp} ，需注意入射角與折射角對調。

$$r = \frac{\tan(r-i)}{\tan(r+i)} \times \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)}$$

$$r_{\perp} = -\frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)} \times \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)}$$

c. 光從水滴進入空氣中，取 t_{\parallel} 與 t_{\perp} ，需注意入射角與折射角與 b. 中相同。

$$t_{\parallel} = \frac{2 \sin i \cos r}{\sin(r+i) \cos(r-i)} \times \frac{\tan(r-i)}{\tan(r+i)} \times \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r) \cos(i-r)} \quad \text{-----(11)}$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \sin i \cos r}{\sin(r+i)} \times (-) \times \frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)} \times \frac{2 \sin r \cos i}{\sin(i+r)} \quad \text{-----(12)}$$

d. 因為強度與電場平方成正比，故取 E^2 。

$$E^2 = t_{\parallel}^2 + t_{\perp}^2 \quad \text{-----(13)}$$

3. 光線強度的分布

光線以 i 的角度入射水滴，由司乃耳定律得出折射角 r ，然後利用第 (11)、(12) 與 (13) 式即得光線出水滴的強度，但是要觀察強度的變化，最好是觀察強度與光線射出方向（即觀測仰角 δ ）的關係。

我們無法直接寫出 E^2 與觀測仰角 δ 的關係，因為那是非常繁雜的式子。最恰當的研究方法是利用電腦計算，適合的工具之一是利用電子試算表。

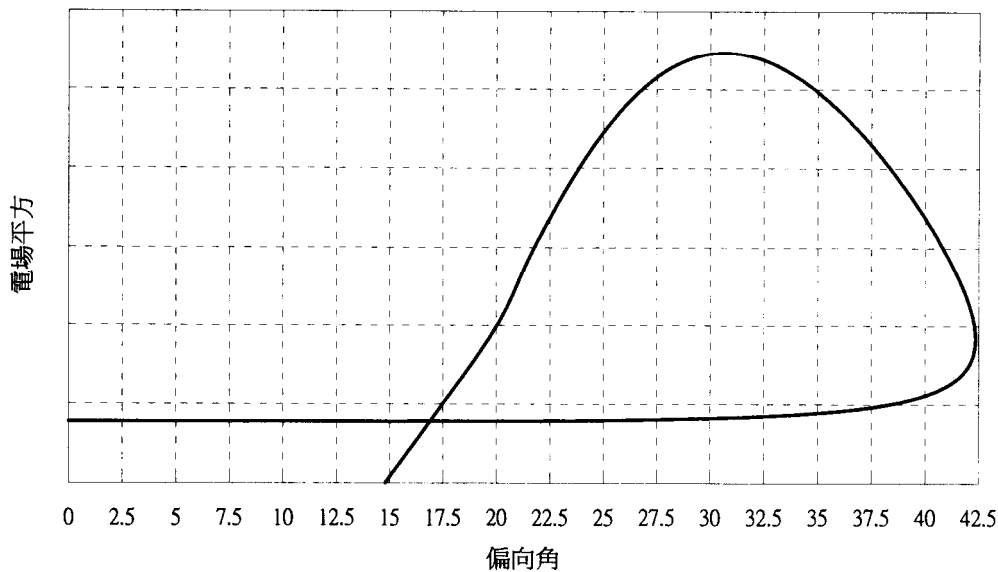


圖 5. 虹的紅光的強度與偏向角的關係

圖 5 中的關係圖顯示某些範圍內有一個觀測角對應兩個電場，這是因為光線的入射角從 0 到 90° 的範圍內， δ 由小到大，再由大到小（ α 則由大到小，再由小到大）。射出的紅光強度最大的偏向角並不是在 42.4° ，而是約在 31° 附近，這與我們預期的不一樣。

4. 光線強度分布的修正

實際上我們看到的光線，並不是細細窄窄的一條光線，而是一個小小範圍內的光進入眼睛，所以合理的修正為：

a. 縱坐標改為光強度（電場平方）乘以單位偏向角變化量內的光量；橫坐標仍為觀測角，如此，關係圖中的尖峰所對應的偏向角才是我們觀察虹的方向，而單位偏向角變化量內的光量為偏向角的函數。

b. 單位偏向角變化量內的光量的求法

陽光射入水滴時的光量對入射角而言並不均勻，但是對於撞擊參數 b 才是均勻的，撞擊參數 b 見右圖，而光量可以用 Δb 來表示。

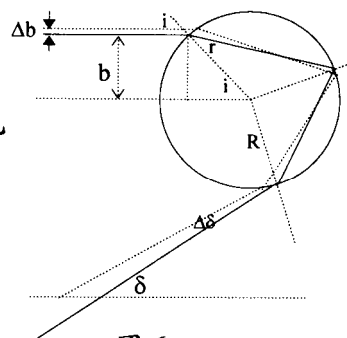


圖 6

c. 關係式的推導：

$$\text{由 } \delta = 4r - 2i$$

$$\Delta\delta = 4\Delta r - 2\Delta i$$

把式中的 Δr 和 Δi 轉換成與撞擊參數 b 的關係，

$$\sin i = \frac{b}{R} \quad b = R \sin(i)$$

又由司乃耳定律

$$\sin(i) = n \sin(r) \quad b = nR \sin(r)$$

分別得

$$\Delta r = \frac{\Delta b}{\sqrt{n^2 R^2 - b^2}} \quad \text{與} \quad \Delta i = \frac{\Delta b}{\sqrt{R^2 - b^2}}$$

$$\text{得 } \Delta\delta = \left[\frac{4}{\sqrt{n^2 R^2 - b^2}} - \frac{2}{\sqrt{R^2 - b^2}} \right] \cdot \Delta b$$

$$\text{或 } \Delta b = \frac{1}{\left[\frac{4}{\sqrt{n^2 R^2 - b^2}} - \frac{2}{\sqrt{R^2 - b^2}} \right]} \cdot \Delta\delta$$

$$\text{故 } \frac{\Delta b}{\Delta \delta} = \frac{1}{\left[\frac{4}{\sqrt{n^2 R^2 - b^2}} - \frac{2}{\sqrt{R^2 - b^2}} \right]}$$

縱坐標改為 $E^2 \cdot \frac{\Delta b}{\Delta \delta}$ ，而橫坐標為 δ 。

5. 數值計算與修正結果

我們仍然用電腦配合試算表來進行計算，並且可以把關係圖繪製出來。結果如圖 7。

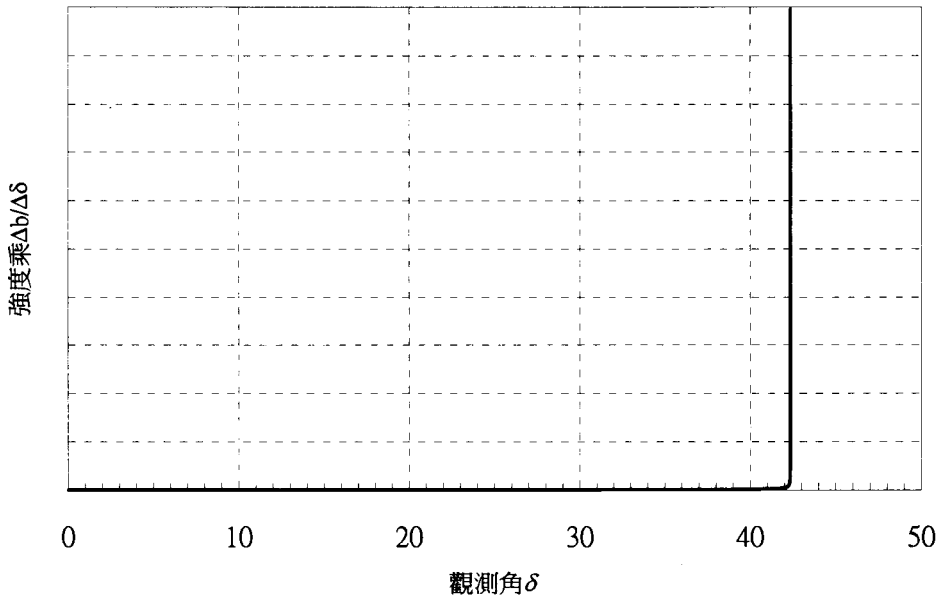


圖 7 強度乘單位偏向角變化量內的光量分布圖

由圖 7 很清楚地可以看出曲線的尖峰位置圖 6 曲線的尖峰位置不同，它的兩個特點為：

- a. 尖峰位置恰與前面方法所得到的角度完全一樣，當然也是我們觀察虹的角度。
- b. 尖峰位置的縱坐標很戲劇性的遠遠比其他方向的相對強度大，而且尖峰處的寬度幾乎為零，這也說明了為什麼我們以一明確的角度觀察虹霓。為了看清楚縱坐標在尖峰附近的變化，我們另做一局部放大的圖。

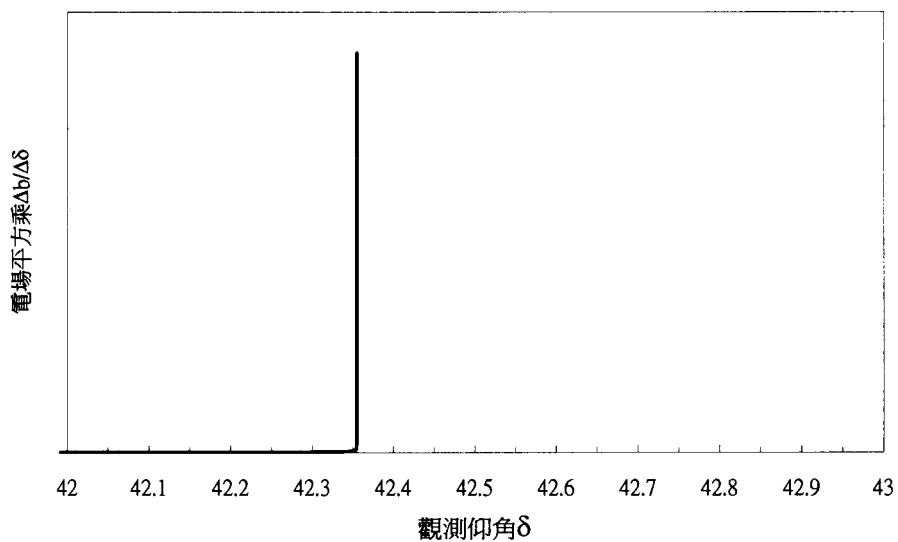


圖 8 $E^2 \Delta b/\Delta\delta$ 與 δ 的關係圖

圖 8 的尖峰處仍是非常窄，這是因為入射光對觀測角 δ 來說不是均勻分布，橫軸改以撞擊參數 b ，但入射光對於撞擊參數而言，是均勻分布，於是我們可以把橫坐標改以撞擊參數來表示，可得圖 9。

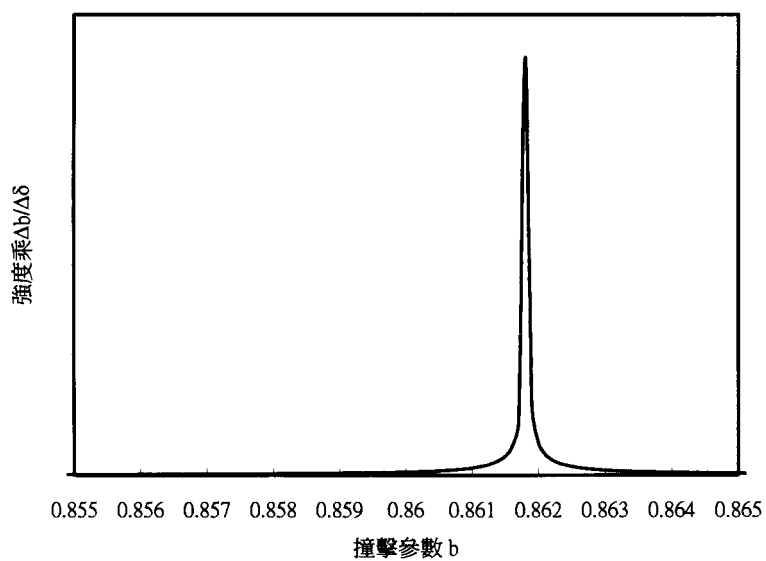


圖 9 $E^2 \Delta b/\Delta\delta$ 與 撞擊參數的關係圖

由圖 9 可以清楚地看出撞擊參數為 0.862 附近射出的總光量最大，而撞擊參數為 0.862 所對應的偏向角就是 42.35° 。

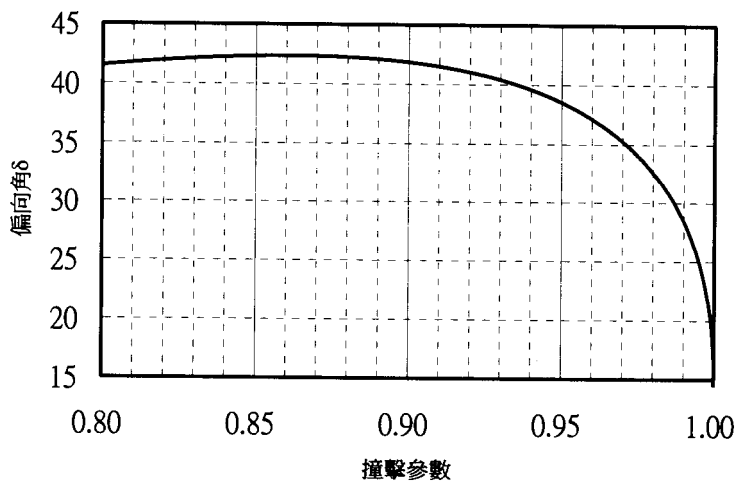


圖 10. 撞擊參數對應的偏向角

6. 觀測虹霓角度的結論

觀測虹霓的方向為特定的角度，其原因雖可由笛卡兒的最小偏向角理論精確計算出來，但是較仔細的考慮仍須由 Fresnel 公式出發來討論。本文上節所用的數據為虹的紅光，至於虹的紫光以及霓的各色光，都可以用同樣的方法來進行分析，結果也都能與實際觀測相符合。

五、有關虹霓的其他問題

1. 為什麼有的時候看到的虹比較大？有的時候比較小？

其實，在地面上看虹霓的大小與虹霓出現的時間有關。我們看到虹的形狀，是圓錐與天際的交界，此圓錐的中心軸為平行太陽光、通過觀察者眼睛的視線，圓錐的頂點就是眼睛的位置，紅色的圓錐所張的角度就是 42.4° ，請參考圖 11。

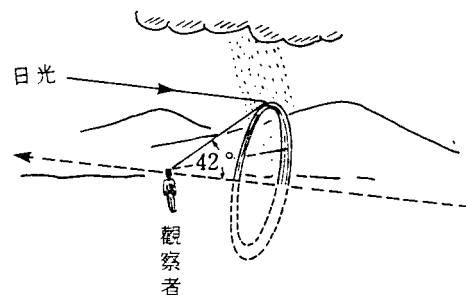


圖 11. 觀察者背向太陽、面對彩虹。

如果早上或下午六點鐘出現的虹，陽光幾乎平行地面射過來，圓錐的軸恰躺在地平面上，看到的虹即為半圓；這是在地面上所能看到最大的虹。

如果是下午五點鐘或早上七點鐘出現的虹，陽光約以與地面成 15° 的方向入射，圓錐的軸與地面傾斜成 15° ，看到的虹比半圓小，觀察虹的紅光時，仰角約為 $42.4^\circ - 15^\circ = 27.4^\circ$ 。

早上九點到下午三點之間，如果有虹形成，在地面上是看不到虹的，因為陽光以大於 42.4° 的方向入射，整個虹都沈在地平面下。

因此地面上的觀察者看到最大的虹為半圓，而飛鳥、飛機上的乘客就有機會看到整圈的虹。

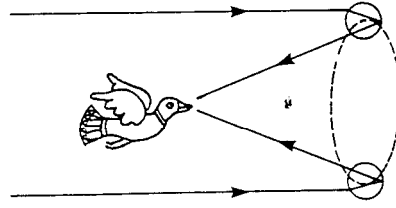


圖 12. 飛鳥可能看到完整圓虹。

2. 虹與霓之間的天空會比較暗，為什麼？

如果我們很仔細的觀察虹與霓，很清楚的可以看到虹跟霓之間的天空相對的比較暗，這是因為虹的各色光從 40.6° 的紫光連續分布到 42.4° 的紅光。而霓的各色光則從 50.4° 的紅光連續分布到 53.6° 的紫光，在這兩個範圍之間的區域，沒有虹或霓的光線射出來加強，只有一般的散射光，所以虹霓之間的天空看起來比較黯淡，稱為亞歷山大暗區 (Alexander's Dark Band)，參考圖 3。

3. 虹與人的距離有多遠？

根據研究，一般的虹霓與觀察者的距離不會超過數公里，在某些特殊情況下，距離可能只有二十公尺，甚至只有三、四公尺。

4. 有沒有光線在水滴內未經反射，只有兩次折射形成的虹？

在水滴內未經反射的虹稱為第零級虹，實際上第零級虹是不存在的。因為第零級的偏向角沒有極小值存在，參考圖 12。

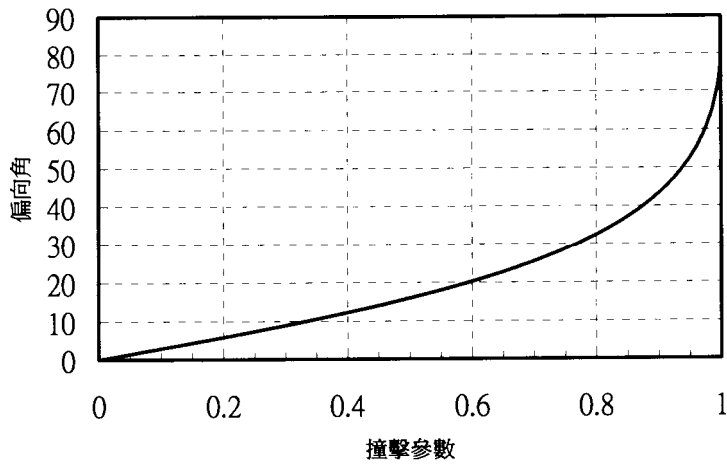


圖 12. 第零級的偏向角沒有極小值。

至於三級以上的虹當然可以存在，只是多次反射後，光線暗多了，比較難觀察。

5. 虹霓的光是不是偏振光？

以虹的紅光為例，由 Fresnel 公式可以計算 42.4° 的光線射出時的 E_{\parallel} 與 E_{\perp} ，
得 $E_{\parallel} = 0.06052$ 與 $E_{\perp} = 0.296434$

故強度比為 $0.06052^2 : 0.296434^2 = 1 : 24$

也就是說射出的光線只有 4% 為平行分量的光，可見這是相當偏振的光線，我們可以用偏振片來觀察與驗證。

6. 形成虹霓的雨滴有多大？

形成虹霓的雨滴，直徑大約在 0.4 到 1 公釐之間，雨滴太小，虹霓會朦朧不清；雨滴太大則易於變形，虹霓也會不清楚。